Quelques pistes et conseils pour aborder (presque) sereinement les mathématiques en HKS

Commencer par faire ou (refaire) des exercices de niveau terminal (l'idéal pour les ES étant de "tendre"[1] vers le programme d'analyse de S) en essayant,autant que faire se peut, de se passer de "prothèse électronique" (du type : HDWT 561 B42X à infrarouges multidirectionnels,auto alimentée en bluetooth et à reconnaissance zodiacale) afin de maîtriser les formules usuelles et savoir les appliquer (sans pour autant tomber dans le pscittacisme, car on vous demandera tout sauf cela). Il n'est peut-être pas inutile de remarquer ici que les énigmes, casse-têtes, jeux logiques etc... de vos magazines préférés peuvent également constituer un bon entrainement car "jamais nous ne deviendrons mathématiciens, même en retenant par coeur toutes les démonstrations des autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre à son tour toute espèce de problème" (Descartes, in Règle III, pour la direction de l'esprit). Dans l'immédiat, voyons (ou revoyons) deux "outils" très fréquemment utilisés : l'I.P.P. et le principe de récurrence, et n'oubliez jamais qu' "un calcul ne s'exécute pas, il se médite"...

1) Intégration par parties (I.P.P.)

Le principe consite à calculer une intégrale (que l'on peut calculer... Eh oui, rien n'est parfait!) autrement que par "primitivation", i.e.: si on ne trouve pas de primitive assez facilement, c'est embêtant mais l'on peut parfois s'en sortir avec cette méthode ...

Théorème : u et v étant 2 fonctions numériques,dérivables à dérivées continues (on dit de classe C^1, lire "c un") sur un intervalle I, a et b étant des réels de I, on a :
$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$

preuve: attendre ou la chercher...
remarques[2]:

1) Cela n'a échappé à personne, la "prime" a changé de place...
2) Dans la pratique, on choisit u' et v (en essayant d'évaluer la pertinence de ce choix, cf. ci-après) et on applique la formule...

Exemple : soit à calculer I=$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.
Posons $u'(x) = \cos x$ et $v(x) = x$.
On peut choisir $u(x) = \sin x$ et on a $v'(x) = 1$, u et v étant de classe C^1, on peut y aller gaiement : I=$[x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = [x\sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$. (Oui, il va falloir aussi réviser un petit peu la trigo...)
rmqs:

1) Si la "nouvelle" intégrale n'est pas plus simple, échanger les rôles de u et v...
2) La position des "primes" est tout à fait arbitraire : elles changent de place dans la "nouvelle" intégrale (on a ainsi la conclusion du théorème qui peut s'écrire :

[1]au sens mathématique du terme, cela va sans dire...
[2]"rmq" par la suite

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.)$$

Exercices :

1) Calculer I= $\int_0^1 (2t-4)\, e^t dt$ et J= $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$.

2) Déterminer la primitive de la fonction ln qui s'annule en 1. (On écrira F(x)= $\int_1^x \ln t\, dt$. Tiens, au fait, pourquoi?)

3) $\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls et l'on considère, pour un tel entier n, l'intégrale : $I = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

a) Prouver que, pour tous x élément de [0,e] et n entier naturel, on a :
$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} \geq 0$.
b) En déduire que la suite (I_n) est décroissante.
c) Calculer I_1 à l'aide d'une I.P.P.
d) Etablir, à l'aide d'une I.P.P., one more time, que : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
e) En déduire I_2, I_3 et I_4.
f) Justifier que $I_n \geq 0$.
g) Montrer que $(n+1)I_n \leq e$.
h) Donner alors la limite de I_n.
i) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

2) Principe de récurrence

L'idée part du simple constat suivant : si l'on demande de prouver qu'une propriété est vraie pour tout entier naturel n (ou à partir d'un certain entier) et si cela n'est pas aussi évident que $(n+1)^2 \geq 1$ ou 3 divise $4^n - 1$ (pour les spécialistes en arithmétique), il est clairement impossible de vérifier cette propriété pour 0,1,2...,2018,... Il faut, en quelque sorte, "un instrument qui permet de passer du fini à l'infini" (H.Poincaré). Le principe de récurrence (le plus fréquent, on verra qu'il y en a d'autres...) peut être imagé ainsi : si l'on peut se placer sur le barreau d'une échelle, et si l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque au suivant, alors on peut gravir tous les barreaux de cette échelle infinie.

Théorème : On considère, pour un entier naturel n, une propriété $\mathcal{P}(n)$. Si $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et si, pour tout entier naturel n fixé supérieur ou égal à n_0, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Exemple : Montrons que pour tout entier naturel n non nul on a $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+...+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ [3]

Pour $n = 1$ on a $1^3 = 1$ et $\frac{1^2(2)^2}{4} = 1$ donc la propriéte est vraie (certains auteurs écrivent: $\mathcal{P}(1)$ est vraie).

Soit $n \geq 1$ tel que $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1+2+...+n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (certains au-

[3] Car $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

teurs écrivent: $\mathcal{P}(n)$ est vraie, ou supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie). On a $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = (1^3+2^3+...+n^3)+(n+1)^3$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence [4], $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$, soit $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n^2+4(n+1))$. Comme $(n^2+4(n+1)) = n^2+4n+4 = (n+2)^2$, on a donc : $1^3+2^3+...+(n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$ et la proposition est vraie au rang $n+1$.
Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, on a $1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

rmqs:

1) La première étape est parfois appelée "initialisation" et $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, "hérédité" (on dit aussi que la propriété est héréditaire).
2) 3 écueils classiques à éviter :
- Oublier d'initialiser le raisonnement...
- Se servir de $\mathcal{P}(n+1)$ pour démontrer $\mathcal{P}(n+1)$, et ça risque pourtant de vous arriver!... (mais écrire au brouillon le résultat que l'on veut obtenir n'est pas idiot).
- Prouver $\mathcal{P}(n+1)$ sans se servir de $\mathcal{P}(n)$: dans ce cas, soit on s'est planté, soit on pouvait démontrer la propriété raisonnement par récurrence (il ne faut pas devenir zinzin de récurrence: montrer par cette méthode que $(n+1)^2 \geq 1$ entame la crédibilité; un peu comme calculer le discriminant pour obtenir les racines de x^2+3x)...

Exercices :

1) Etablir que pour tout entier naturel n, 4^n+2 est un multiple de 3.

2) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $1^2+2^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3) On pose, pour $n \geq 1$, $S_n = \dfrac{1}{1\times2\times3} + .\dfrac{1}{2\times3\times4} + ... + \dfrac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$.
Montrer que $Sn = \dfrac{n\times(n+3)}{4\times(n+1)\times(n+2)}$ et en déduire la limite de S_n.

3) Un problème d'analyse

(Ou petit tour d'horizon sur les fonctions, limites, dérivées, suites, intégrales...)

Partie A

On désigne par ln le logarithme népérien et par $\mathbb{N}^\star$ l'ensembles des entiers naturels strictement positifs. On considère, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, la fonction f_n, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0,+\infty[$ par : $f_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

1) Déterminer les limites de f_n aux bornes de l'intervalle $]0,+\infty[$, puis étudier les variations de f_n .
2) Donner l'allure de C_1, courbe représentative de f_1 dans le plan rapporté à un repère orthonormal. Préciser ses asymptotes.

[4] qui est, bien sûr: $1^3+2^3+...+n^3 = (1+2+...+n)^2 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3) Pour X réel supérieur ou égal à 1, on pose : $I_n(X) = \displaystyle\int_1^X f_n(t)dt$.

a) Calculer $I_1(X)$.

b) A l'aide d'une I.P.P., calculer $I_n(X)$ en fonction de n et de X, pour n supérieur ou égal à 2. Déduire de ce résultat la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_2^X f_2(t)dt$.

c) Pour n appartenant à $\mathbb{N}^\star$, calculer la limite de $I_n(X)$ quand X tend vers $+\infty$ (on distinguera les cas $n = 1$ et $n \geq 2$), puis celle de $\displaystyle\int_2^X f_2(t)dt$.

Partie B

On considère la fonction f_2 définie en A par : $f_2(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

1) Montrer que pour tout entier naturel k, $k \geq 2$: $f_2(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f_2(t)dt \leq f_2(k)$.

2) On considère la suite S définie par terme général : $S_p = \dfrac{\ln 2}{2^2} + \dfrac{\ln 3}{3^2} + ... + \dfrac{\ln p}{p^2}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que S est croissante.

b) En utilisant B 1), montrer que : $S_p - \dfrac{\ln 2}{2^2} \leq \displaystyle\int_2^p f_2(t)dt \leq S_p - \dfrac{\ln p}{p^2}$ et en déduire un encadrement de S_p.

c) En utilisant la valeur de $\displaystyle\int_2^p f_2(t)dt$ trouvée en A, montrer que la suite S est majorée.

d) Prouver enfin que la suite S est convergente et que sa limite L vérifie :
$\dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln 2}{2} \leq L \leq \dfrac{1}{2} + 3\dfrac{\ln 2}{4}$.

4) Le casse-tête

Ce programme de travail n'est bien entendu pas exhaustif, et peut-être complété en (re)voyant les suite usuelles, les croissances comparées, les nombres complexes...
Pour les plus ambitieux, il n'est pas non plus interdit de s'initier à l'algèbre linéaire, mais n'oubliez-pas que le "A" vient avant le "B"... Vous trouverez également des sujets de Bac (entre autres) corrigés sur le site : apmep.asso.fr (et même des sujets de 1941!), il n'est pas utile de traiter les questions de géométrie.
Enfin, pour illustrer les propos de l'introduction, voici le casse-tête tant attendu, et le suspens est, bien sûr, à son comble !(ou "stimulus avec procédé d'attente", comme on dit de nos jours): une personne feuillette les pages d'un livre numérotées de 1 à ... et additionne à chaque fois le numéro de la page aux précédents. Elle obtient 2005, sans avoir remarqué que deux pages étaient collées. Combien ce livre peut-il avoir de pages, et dans chaque(s) cas quels sont les numéros des pages collées?

Addenda

Notion de composition de fonctions.

Les programmes actuels ne font plus mention de composée de fonctions ni de dérivées de telles fonctions[5]. Il s'agit pourtant d'une notion à la fois essentielle et très abordable...

[5] sauf dans les cas particuliers de exponentielle et Ln : vous avez tous rencontré une fonction du type e^u...

Par exemple, si f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par f(x)= x+2 et g(x)= x^2+x, la composée de f et g notée gof (lire " g rond f") est tout simplement définie par : gof(x)= g(f(x)) et donc gof(x)=$(x+2)^2$+ (x+2) i.e.: gof(x)=x^2+5x+6 . On remarquera qu'en général gof$\neq$fog (expliciter fog(x) dans l'exemple précédent pour s'en convaincre). La généralisation ne pose aucune difficulté : il suffit seulement d'être attentif aux ensembles de définition pour que cela ait un sens (composer une fonction prenant des valeurs négatives et Ln ne semble pas raisonnable!). On est amené à calculer les dérivées (si elles existent...) de telles fonctions[6] et la formule générale est, pour x élément d'un intervalle I : (gof)$'$(x)= g$'$(f(x)).f$'$(x) (à condition, bien sûr, que f soit dérivable sur I et g dérivable sur f(I), f(I) désignant l'image de l'intervalle I par f).
On a, par exemple, si u est une fonction dérivable sur un intervalle I : pour tout entier naturel non nul n, $(u^n)'=nu'u^{n-1}$ (qui est encore valable pour n entier relatif négatif, rationnel, et même réel si cela a un sens. On (re)trouve ainsi $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, il suffit d'appliquer la formule précédente pour $n = \dfrac{1}{2}$ (rappelons ici que $\sqrt{x}$ se note aussi $x^{\frac{1}{2}}$).
Vous trouverez dans n'importe quel manuel de terminale antérieur à 2013, ou sur internet des exercices sur ce thème. Les élèves de TES, voire TS, pourront également s'entrainer à la recherche de limites de fonctions composées et/ou limites tout court d'ailleurs (par exemple $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}$ etc...) et se familiariser avec les croissances comparées de Ln, exp et les fonctions puissances (par exemple, savoir que $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$, pour $\alpha > 0$).

Quelques compléments sur les suites.

On demande fréquemment de prouver qu'une suite converge (i.e. : a une limite réelle en plus l'infini) sans connaître la valeur de cette limite (cf. question B)2d) du problème).
Le théorème suivant (que les TS connaissent, en principe) permet parfois de répondre à cette question.
Th. Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) est convergente.
De même, ne connaissant pas la valeur exacte d'une limite, on en cherche parfois un encadrement...
Prop. Si la suite (u_n) converge vers L, et s'il existe un réel A (resp. B)tel que pour n assez grand $u_n \geq$ A (resp. $u_n \leq$ B) alors L$\geq$A (resp. L$\leq$B) .

Il va sans dire que les formules concernant les suites arithmétiques et géométriques (expression du terme général et somme des premiers termes) sont à connaître absolument (si vous hésitez sur l'expression de $1 + 2 + ... + n$ (notée aussi $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k$) [7], revoyez vite les notions de base sur les suites arithmétiques !)

Bon courage, bonnes révisions et...Bonnes vacances!

A bientôt.

---

[6] sous réserve que cela ait un sens on a, par exemple, $(e^u)'=u'e^u$ et $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

[7] Il faudra s'habituer au symbole de sommation, et la réponse est, bien évidemment : $\dfrac{n(n+1)}{2}$